Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas IV (MA-2115)
Septiembre-Diciembre 2008

3^{ra} Autoevaluación

Material Cubierto: La presente autoevaluación versa sobre el material cubierto en las clases 12 a 14 del cronograma del curso, es decir, las secciones 7,8,9,10 y 11 del texto de los profesores Viola-Prioli.
Nota: La presente autoevaluación no tiene ningún valor para la nota final de este curso.
Notación: La función logaritmo natural, es decir, la función inversa de $g(x) = e^x$ se denotará por $f(x) = \log(x)$.
Sobre el tiempo estimado: El tiempo estimado se obtuvo multiplicando por 5 el tiempo que me tomó a mí resolver los problemas (en algunos casos agregando unos minutos para tener, por ejemplo, 25min en vez de 22min 30seg).
¿Comentarios, preguntas o errores? Escriba a la dirección `fojeda@usb.ve` (Prof. Francisco Ojeda). Por favor use el código (MA-2115) o nombre de este curso en el encabezado de su mensaje (ya que en caso contrario por desconocer al remitente probablemente borre su mensaje sin leerlo).

1. Desarrollo

Tiempo estimado: 1 hora 45 minutos
Instrucciones: Resuelva los siguiente problemas, justificando sus respuestas. Marque la respuesta correcta en cada una de las siguientes preguntas. Al finalizar, y antes, de proceder a la parte 2, verifique si sus respuestas son correctas. Se le sugiere que también lea las resoluciones de los problemas proporcionados. Recuerde si su solución y la solución publicada difieren en el procedimiento, esto no necesariamente significa que su solución sea incorrecta, ya que puede haber más de una manera de resolver un problema. Por otro lado, el hecho que Ud. haya indicado la respuesta correcta, no significa que el procedimiento que Ud. usó esté necesariamente bien. Si Ud. tiene una duda respecto a su solución o a la solución proporcionada se le sugiere consulte a su profesor.

1.1. Preguntas

Pregunta 1.1. Sea $\mathcal{F}$ la familia de curvas $y = \frac{c}{x}$ con $c \in \mathbb{R}$. Halle las trayectorias ortogonales de $\mathcal{F}$.

(a) $y^3 = x^2 + K$

(b) $y^2 = x^3 + K$

(c) $y^2 = -x^2 + K$

(d) $y^2 = x^2 + K$

(e) $y^3 = x^3 + K$

Pregunta 1.2. Resuelva $y\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

(a) $y = e^{\frac{D}{x}}$

(b) $y = xe^{Dx}$

(c) $y = 0, y = e^{2x^2}$

(d) $y = \log Dx + F$

(e) $y = Fe^{Dx}$

Pregunta 1.3. El problema de valor inicial $y\prime = 2x(1+y)$, $y(0) = 0$ satisface las hipótesis del Teorema de Picard. Use el método de Picard para hallar la solución.

(a) $y = e^{x^2} - 1$

(b) $y = 1 - e^{x^2}$

(c) $y = e^x - 1$

(d) $y = xe^x$

(e) $y = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{i!}$

Pregunta 1.4. Resuelva $y' - (9x - y + 2)^2 = 0$, $y(0) = 2$.

(a) $y = 9x + 3 - 2\frac{e^{6x}-1}{e^{6x}+1}$

(b) $y = 9x + 2 - 3\frac{e^{6x}-1}{e^{6x}+1}$

(c) $y = 7x + 2 - 3\frac{e^{6x}-1}{e^{6x}+1}$

(d) $y = 9x + 2 - 3\frac{e^{-6x}-1}{e^{6x}+1}$

(e) $y = 9x + 2 - 3\frac{e^{6x}+1}{e^{-6x}+1}$

Las respuestas a esta parte se encuentran en la página siguiente

1.2. Respuestas

1.1(d), 1.2(e), 1.3(a), 1.4(b)

1.3. Resolución de los problemas

Solución 1.1. $y = \frac{c}{x}$ implica que $yx = c$. Derivamos esto obteniendo $y + xy' = 0$, por lo que como $x \neq 0$ tenemos que $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ y por lo tanto una ecuación diferencial para las trayectorias ortogonales es $-\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$, es decir, $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ (si $y \neq 0$). Esta ecuación es separable y por lo tanto tenemos que $ydy = xdx$, lo que implica que $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$, es decir, $y^2 = x^2 + K$ (donde como C es arbitraria $K = 2C$ también es una constante arbitraria).

Solución 1.2. En esta ecuación diferencial de segundo orden no aparece x, por lo que usamos la sustitución $w = \frac{dy}{dx}$. Tenemos entonces que $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dw}{dy}w$ por lo que tenemos que nuestra ecuación diferencial se convierte en

$$y\frac{dw}{dy}w = w^2.$$

Vemos que la función $w = 0$ (para todo y) es solución de nuestra ecuación, pero esto quiere decir que $\frac{dy}{dx}$ es idénticamente cero y por lo tanto $y = C$ para todo x. Entonces $y = C$ es solución de nuestra ecuación original[1]. Supongamos ahora que $w \neq 0$ y $y \neq 0$. Entonces nuestra ecuación se puede escribir como $\frac{dw}{w} = \frac{dy}{y}$. Integrando obtenemos que

$$\log|w| = \log|y| + C = \log|y| + \log e^C = \log\left(|y|\, K\right),$$

donde $K = e^C$. Aplicando la función exponencial obtenemos que $|w| = |y|\, K$. Entonces por el valor absoluto tenemos dos familias de soluciones

$$w = yK \text{ y } w = -yK.$$

Pero como $K > 0$ podemos representar estas dos soluciones como $w = yD$ con $D \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$[2]. Recordamos ahora que $w = \frac{dy}{dx}$, entonces $\frac{dy}{dx} = yD$. Esto implica (recuerde que supusimos antes que $y \neq 0$)

$$\frac{dy}{y} = Ddx.$$

Integrando obtenemos $\log|y| = Dx + E$ y entonces $|y| = e^{Dx+E}$, lo que de las dos familias de soluciones

$$y = e^{Dx+E} \text{ y } y = -e^{Dx+E}.$$

Estas soluciones se pueden escribir como $y = Fe^{Dx}$ con $F \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Más aún, si permitimos que D y F tomen el valor 0, $y = Fe^{Dx}$ también incluye las funciones constantes que ya vimos son solución de nuestra ecuación diferencial. Entonces nuestras soluciones son de la forma $y = Fe^{Dx}$ con $F, D \in \mathbb{R}$.

---

[1] Esto es obvio ya que si $\frac{dy}{dx} = 0$ para todo x, tenemos que $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ para todo x.

[2] Podríamos considerar también $D = 0$, pero eso nos daría la ecuación $w = 0$, es decir, $\frac{dy}{dx} = 0$, y ese caso ya lo consideramos.

Solución 1.3. Tenemos que $y_0(x) = 0$. Entonces

$$y_1(x) = \int_0^x 2t(1 + y_0(t))dt = \int_0^x 2tdt = x^2.$$

Por lo tanto

$$y_2(x) = \int_0^x 2t(1 + y_1(t))dt = \int_0^x 2t(1 + t^2)dt = x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

Entonces

$$y_3(x) = \int_0^x 2t(1 + y_2(t))dt = \int_0^x 2t(1 + t^2 + \frac{t^4}{2})dt = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}.$$

Conjeturamos que $y_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x^{2i}}{i!}$ para $n \geq 1$ e intentamos probarlo por inducción. Para $N = 1$ la fórmula propuesta es cierta. Ahora suponemos que $y_N(x) = \sum_{i=1}^N \frac{x^{2i}}{i!}$ y consideramos el caso $N + 1$. Sabemos que

$$\begin{aligned} y_{N+1}(x) &= \int_0^x 2t(1 + y_N(t))dt \underset{\text{por hip. ind.}}{=} \int_0^x 2t(1 + \sum_{i=1}^N \frac{t^{2i}}{i!})dt = 2\int_0^x \left(t + \sum_{i=1}^N \frac{t^{2i+1}}{i!}\right) dt \\ &= 2\int_0^x \left(\sum_{i=0}^N \frac{t^{2i+1}}{i!}\right) dt = 2\sum_{i=0}^N \int_0^x \frac{t^{2i+1}}{i!} dt = 2\sum_{i=0}^N \frac{t^{2i+2}}{i!\,(2i+2)} \\ &= \sum_{i=0}^N \frac{t^{2i+2}}{i!\,(i+1)} = \sum_{i=0}^N \frac{t^{2i+2}}{(i+1)!} = \sum_{j=1}^{N+1} \frac{t^{2j}}{j!}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos la sustitución $j = i + 1$. Entonces la solución de nuestro problema con valor inicial es

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{x^{2i}}{i!} = \sum_{i=1}^\infty \frac{x^{2i}}{i!} = \sum_{i=1}^\infty \frac{(x^2)^i}{i!} = \left(\sum_{i=0}^\infty \frac{(x^2)^i}{i!}\right) - 1 = e^{x^2} - 1.$$

Solución 1.4. Hacemos la sustitución $v = 9x - y + 2$. Entonces $v' = 9 - y'$ y nuestra ecuación diferencial se convierte en

$$9 - v' - v^2 = 0, \text{ es decir, } \frac{dv}{dx} = 9 - v^2. \Rightarrow \frac{dv}{9 - v^2} = dx,$$

para $v \neq 3$, $v \neq -3$. Antes de integrar a ambos lados de la ecuación diferencial observamos que $\frac{1}{9-v^2} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3-v} + \frac{1}{3+v}\right)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}\int \left(\frac{1}{3-v} + \frac{1}{3+v}\right) dv &= \int 1dx \Rightarrow \frac{1}{6}\left(-\log|3 - v| + \log|3 + v|\right) = x + K \\ &\Rightarrow \log\left|\frac{3+v}{3-v}\right| = 6x + 6K = 6x + C, \end{aligned}$$

donde C es una constante arbitraria (ya que K también lo era). Aplicando la función exponencial tenemos que $\left|\frac{3+v}{3-v}\right| = e^{6x+C}$. Tenemos, en principio dos casos que surgen debido al valor absoluto:

$$\frac{3+v}{3-v} = e^{6x+C} \quad \text{y} \quad -\frac{3+v}{3-v} = e^{6x+C},$$

Esto dos casos se pueden escribir como $\frac{3+v}{3-v} = De^{6x}$, donde $D \neq 0$. Despejando v tenemos que

$$v = 3\frac{De^{6x} - 1}{De^{6x} + 1}.$$

Recordamos que $v = 9x - y + 2$, entonces

$$9x - y + 2 = 3\frac{De^{6x} - 1}{De^{6x} + 1} \Rightarrow y = 9x + 2 - 3\frac{De^{6x} - 1}{De^{6x} + 1}.$$

Recordamos la condición inicial $y(0) = 2$. Entonces

$$2 = 2 - 3\frac{D - 1}{D + 1} \Rightarrow D = 1$$

lo que implica que

$$y = 9x + 2 - 3\frac{e^{6x} - 1}{e^{6x} + 1}.$$

2. Desarrollo. Más problemas

Tiempo estimado: 1 hora 45 minutos
Instrucciones: Resuelva los siguiente problemas, justificando sus respuestas. Marque la respuesta correcta en cada una de las siguientes preguntas. Al finalizar verifique si sus respuestas son correctas. Se le sugiere que también lea las resoluciones de los problemas proporcionados. Recuerde si su solución y la solución publicada difieren en el procedimiento, esto no necesariamente significa que su solución sea incorrecta, ya que puede haber más de una manera de resolver un problema. Por otro lado, el hecho que Ud. haya indicado la respuesta correcta, no significa que el procedimiento que Ud. usó esté necesariamente bien. Si Ud. tiene una duda respecto a su solución o a la solución proporcionada se le sugiere consulte a su profesor.

2.1. Preguntas

Pregunta 2.1. Resuelva $y' = \frac{2x^2 - y^2}{x^2}$.

(a) $y = \frac{Mx^4 - 2x}{Mx^3 + 1}$

(b) $y = \frac{Mx^4 + 2x}{Mx^3 + 1}$

(c) $y = \frac{Mx^4 - 2x}{Mx^3 - 1}$

(d) $y = \frac{Mx^3 - 2}{Mx^3 + 1}$

(e) $y = \frac{Mx^4 - 2}{Mx^3 + 1}$

Pregunta 2.2. Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x + 1}{2y - x}$. Puede dejar su solución en forma implícita.

1. $(y - 1)^2 - (x - 2)(y - 1) + \frac{(x-2)^2}{2} = K$, con $K \neq 0$.

2. $(y+1)^2 - (x-2)(y-1) + \frac{(x-2)^2}{2} = K$.

3. $(y-1)^2 - (x-2)(y-1) + \frac{(x+2)^2}{2} = K$, con $K \neq 0$.

4. $(y-1)^2 - (x+2)(y-1) + \frac{(x+2)^2}{2} = K$.

5. $(y+1)^2 - (x-2)(y+1) + \frac{(x-2)^2}{2} = K$, con $K \neq 0$.

Pregunta 2.3. Resuelva $2xe^{2y}y' = 3x^4 + e^{2y}$. Asuma $x > 0$.

(a) $y = \log\sqrt{\frac{3}{2}x^4 + Cx}$

(b) $y = \log\sqrt{x^4 + Cx^2}$

(c) $y = \log\sqrt{x^4 + Cx}$

(d) $y = \sqrt{x^4 + Cx}$

(e) $y = \log\sqrt{x^5 + Cx}$

Las respuestas a esta parte se encuentran en la página siguiente

2.2. Respuestas

2.1 (a), 2.2 (a), 2.3 (c)

2.3. Resolución de los problemas

Solución 2.1. Observamos que nuestra ecuación diferencial es homogénea ya que

$$y' = \frac{2x^2 - y^2}{x^2} = \frac{2x^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} = 2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Entonces usamos la sustitución $v = \frac{y}{x}$, es decir, $vx = y$. Derivando tenemos que $v'x + v = y'$. Entonces nuestra ecuación diferencial se convierte en

$$v'x + v = 2 - v^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx}x = 2 - v^2 - v$$

la cuál es una ecuación diferencial separable ya que se puede reescribir como $\frac{dv}{2-v^2-v} = \frac{dx}{x}$. Antes de integrar la ecuación anterior, observamos que $2 - v^2 - v = (1-v)(v+2)$ y que entonces $\frac{dv}{2-v^2-v} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-v} + \frac{1}{v+2}\right)$. Entonces

$$\int \frac{dv}{2 - v^2 - v} = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{1-v} + \frac{1}{v+2}\right) dv = \frac{1}{3}(-\log|1-v| + \log|v+2|) + C_1$$

y

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C_2$$

por lo que

$$\frac{1}{3}(\log|v+2| - \log|1-v|) = \ln|x| + C \Rightarrow \log|v+2| - \log|1-v| = 3\log|x| + K$$

donde $K = 3C$ es una constante arbitraria (ya que C lo era). Entonces

$$\log\left|\frac{v+2}{1-v}\right| = \log\left(|x|^3 L\right),$$

donde $\log(L) = K$ y $L > 0$. Aplicando la función exponencial a la identidad anterior tenemos que

$$\left|\frac{v+2}{1-v}\right| = |x|^3 L.$$

Entonces tenemos, en principio, dos familias de soluciones

$$\frac{v+2}{1-v} = x^3 L \quad \text{y} \quad \frac{v+2}{1-v} = -x^3 L.$$

Tomando $M \neq 0$, podemos escribir estas dos soluciones como $\frac{v+2}{1-v} = x^3 M$. Despejando, obtenemos que

$$v = \frac{Mx^3 - 2}{Mx^3 + 1}.$$

Recordando ahora que $v = \frac{y}{x}$ tenemos que

$$\frac{y}{x} = \frac{Mx^3 - 2}{Mx^3 + 1} \Rightarrow y = \frac{Mx^4 - 2x}{Mx^3 + 1},$$

con $M \neq 0$. Pero es fácil ver que si $M = 0$, la expresión anterior también es solución de nuestra ecuación diferencial, por lo que nuestra solución es $y = \frac{Mx^4-2x}{Mx^3+1}$ con $M \in \mathbb{R}$.

Solución 2.2. Sean $u = x + A$, $z = y + B$. Entonces

$$\frac{dz}{du} = \frac{dy}{dx} = \frac{y - x + 1}{2y - x} = \frac{z - B - u + A + 1}{2(z - B) - (u - A)} = \frac{z - u - B + A + 1}{2z - u - 2B + A}.$$

Queremos entonces que

$$\begin{cases} -B + A + 1 = 0 \\ -2B + A = 0 \end{cases}.$$

Este sistema tiene solución $A = -2$, $B = -1$. Entonces $u = x - 2$ y $z = y - 1$. Por lo tanto nuestra ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{dz}{du} = \frac{z - u}{2z - u} = \frac{\frac{z}{u} - 1}{2\frac{z}{u} - 1}.$$

Entonces usamos la sustitución $v = \frac{z}{u}$. Por lo tanto $z = vu$ y $\frac{dz}{du} = \frac{dv}{du}u + v$ y entonces

$$\frac{dv}{du}u + v = \frac{v - 1}{2v - 1} \Rightarrow \frac{dv}{du}u = \frac{v - 1}{2v - 1} - v = \frac{-2v^2 + 2v - 1}{2v - 1} \Rightarrow \frac{2v - 1}{-2v^2 + 2v - 1}dv = \frac{du}{u}.$$

Tenemos que$-2(v^2 - v + \frac{1}{2}) = (-2v^2 + 2v - 1)$

$$\int \frac{2v - 1}{-2v^2 + 2v - 1}dv = -\frac{1}{2}\int \frac{2v - 1}{v^2 - v + \frac{1}{2}}dv = -\frac{1}{2}\log\left|v^2 - v + \frac{1}{2}\right| + C_1.$$

y $\int \frac{du}{u} = \log u + C^2$, por lo tanto

$$-\frac{1}{2}\log\left|v^2 - v + \frac{1}{2}\right| = \log|u| + C.$$

Entonces

$$\log\left|v^2 - v + \frac{1}{2}\right| = -2\log|u| - 2C = \log\frac{1}{u^2} + \log K = \log\frac{K}{u^2}.$$

donde K es una constante positiva ($-2C = \log(K)$). Aplicando la función exponencial a ambos lados tenemos que

$$\left|v^2 - v + \frac{1}{2}\right| = \frac{K}{u^2}.$$

Esto implica que $v^2 - v + \frac{1}{2} = \frac{K}{u^2}$, donde ahora K es una constante distinta de cero (posiblemente negativa). Entonces

$$u^2v^2 - u^2v + \frac{u^2}{2} = K$$

y recordando que $v = \frac{z}{u}$, tenemos que

$$z^2 - uz + \frac{u^2}{2} = K.$$

Recordando que $u = x - 2$ y $z = y - 1$ tenemos que

$$(y - 1)^2 - (x - 2)(y - 1) + \frac{(x - 2)^2}{2} = K \text{ para } K \neq 0$$

Solución 2.3. Hacemos la sustitución e^{2y} y entonces $v' = 2e^{2y}y'$ y por lo tanto la ecuación $2xe^{2y}y' = 3x^4 + e^{2y}$ se convierte en

$$xv' = 3x^4 + v \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = 3x^3$$

Esta última ecuación es lineal y de primer orden por lo que usamos el factor integrante $e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\log|x|} = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$ ya que estamos asumiendo $x > 0$, entonces

$$v'\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\frac{v}{x} = 3x^2 \Rightarrow \left(v\frac{1}{x}\right)' = 3x^2 \Rightarrow v\frac{1}{x} = x^3 + C \Rightarrow v = x^4 + Cx.$$

Recordando que $v = e^{2y}$, tenemos que

$$e^{2y} = x^4 + Cx \Rightarrow 2y = \log(x^4 + Cx) \Rightarrow y = \frac{1}{2}\log\left(x^4 + Cx\right) = \log\sqrt{x^4 + Cx}$$

donde $x^4 + Cx > 0$, es decir, $x > \sqrt[3]{-C}$.